

PROGRAMMA di ANALISI MATEMATICA T1 - A.A.2011-2012
CdL Ingegneria Edile – Università di Bologna - prof.G.Cupini
(versione aggiornata il 15-12-2011)

N.B.: Gli argomenti sottolineati saranno argomento della sola prova orale

INSIEMI NUMERICI

Insiemi e operazioni tra insiemi. Numeri naturali, interi, razionali, reali. Proprietà dei numeri razionali e reali. Assioma di completezza. \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di completezza. La radice quadrata di 2 non è razionale (con dimostrazione).

Maggioranti e minoranti. Insiemi limitati superiormente o inferiormente, insiemi limitati. Massimi e minimi. Estremo superiore e inferiore.

FUNZIONI

Definizione di funzione. Dominio, codominio, immagine. Funzioni suriettive. Grafico di una funzione. Funzioni iniettive, invertibili. Funzione inversa. Funzioni limitate, pari e dispari, crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone. Operazioni tra funzioni: somma, sottrazione, prodotto, rapporto, composizione. Funzioni costanti, funzione identità, funzione valore assoluto. Funzioni potenza. Funzioni esponenziali e logaritmiche. Funzioni trigonometriche: seno, coseno, arcoseno, arcocoseno, tangente e arcotangente. Funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico. Trasformazioni elementari di grafici. Studio del dominio di una funzione.

LIMITI E CONTINUITA'

Intorno, intorno destro, intorno sinistro. Punto di accumulazione e punto di accumulazione bilatero. Definizione di limite e suo significato. Limite da destra e da sinistra. Legame tra limite, limite destro e limite sinistro. Teorema di unicità del limite (con dimostrazione).

Aritmetica di infinito e di zero. Forme indeterminate. Algebra dei limiti: limite della somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni.

Legame tra limite di $f(x)$ e limite di $|f(x)|$ (con dimostrazione nel caso di limite uguale a 0).

Teorema dei due carabinieri. Teorema del confronto. $|\sin x| \leq |x|$ (con dimostrazione).

Limite $\sin x$ per x che tende a 0 è uguale a 0 (con dimostrazione). Limite $\cos x$ per x che tende a 0 è uguale a 1 (con dimostrazione). Limite $\sin x/x$ per x che tende a 0 è uguale a 1 (con dimostrazione). Funzione infinitesima. Funzione infinitesima per funzione limitata è una funzione infinitesima (con dimostrazione). Teorema del cambiamento di variabile nel calcolo dei limiti. Limiti notevoli $(1-\cos x)/x^2$ e $(1-\cos x)/x$ per x che tende a 0 (con dimostrazione).

Definizione di continuità di una funzione. Le funzioni elementari sono continue. Classificazione dei punti di discontinuità. Somma, prodotto, rapporto e composizione di funzioni continue sono funzioni continue. Infiniti. Somma di un infinito e di una funzione limitata è un infinito (con dimostrazione).

Confronto tra infiniti. Principio di sostituzione degli infiniti. Limite di un rapporto di polinomi per x che tende a infinito. Funzioni asintotiche.

Confronto tra infinitesimi. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Limiti notevoli. Teoremi di permanenza del segno (Teorema 3.24 (i) con dimostrazione, teorema 3.24 (ii) senza dimostrazione, teorema 3.55 con dimostrazione; i riferimenti sono al libro di testo adottato). Punti e valori di massimo/minimo assoluti e relativi. Teorema di Weierstrass. Teorema di esistenza degli zeri e sue varianti. Teorema di esistenza dei valori intermedi. L'immagine di un intervallo mediante una funzione continua è un intervallo.

Teorema di continuità della funzione inversa.

DERIVATE

Rapporto incrementale: definizione, interpretazione geometrica e cinematica. Derivata: definizione, interpretazione geometrica e cinematica. Funzione differenziabile. Retta tangente al grafico. Calcolo di derivate usando la definizione (con dimostrazione): seno, esponenziale di base e , potenza, funzione segno. Calcolo di derivate usando la definizione (con dimostrazione): valore assoluto, funzione costante, costante per funzione, radice cubica. Continuità non implica derivabilità. Derivabilità implica continuità (con dimostrazione). Derivata di una somma, differenza, prodotto, rapporto di funzioni. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa e applicazione al calcolo della derivata della funzione arcoseno. Derivate delle funzioni elementari. Derivata da destra e da sinistra. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Punti critici. Teorema di Rolle (con dimostrazione) e teorema di Lagrange (con dimostrazione). Formula 4.18 del libro di testo (con dimostrazione). Test di monotonia (con dimostrazione). Teorema sul legame esistente tra funzione costante e funzione con derivata nulla se definite in un intervallo (con dimostrazione) e sua applicazione. Funzioni strettamente monotone e segno della derivata. Legame tra limite della derivata e limite del rapporto incrementale. Classificazione dei punti di continuità che non sono punti di derivabilità: punto angoloso, a tangenza verticale, di cuspidi. Metodi per la loro identificazione. Derivate di ordine superiore.

Polinomio di Taylor. Sviluppo di Taylor di ordine k con resto in forma di Peano e di Lagrange. Calcolo del polinomio di Taylor per $\exp(x)$ e $\sin(x)$. Applicazioni al calcolo dei limiti. Teorema di classificazione dei punti stazionari (con dimostrazione).

Generalizzazione del teorema di classificazione dei punti stazionari al caso in cui la prima derivata che si annulla non sia la derivata seconda, ma una derivata di ordine $k > 2$.

Definizione di convessità e suo significato geometrico. Definizione di funzione concava. Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili. Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili fino al secondo ordine (con dimostrazione della seguente implicazione: se f'' è non negativa allora la funzione è convessa). Definizione di punto di flesso. Asintoti orizzontali, verticali, obliqui. Studio del grafico di una funzione.

ALGEBRA LINEARE

Vettori. Somma di vettori e moltiplicazione per scalari: definizione e proprietà. Norma di un vettore e prodotto scalare tra vettori: definizione e proprietà. Definizione di spazio vettoriale. Definizione di matrice. Somma di matrici. Prodotto righe per colonne: definizione e proprietà. Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Matrici quadrate. Matrice identità. Matrici invertibili e matrice inversa. Determinante di una matrice quadrata. Proprietà dei determinanti. Teorema di Laplace (per il calcolo del determinante di una matrice secondo una riga/colonna). Regola di Sarrus (per il calcolo di determinanti di matrici 3×3). Caratterizzazione delle matrici invertibili. Sistemi lineari di n equazioni ed n incognite e loro rappresentazione in forma matriciale. Sottomatrici. Rango. Teorema di Rouché-Capelli. Teorema di Cramer e formula di Cramer.

Sottospazio vettoriale. Spazio vettoriale generato da vettori. Vettori linearmente indipendenti. Definizione di base di uno spazio vettoriale. Dimensione di uno spazio vettoriale. Il caso di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Come stabilire se tre vettori di \mathbb{R}^3 (o due di \mathbb{R}^2) costituiscono una base. Prodotto vettoriale di due vettori di \mathbb{R}^3 : definizione e proprietà. Autovalori e autovettori: definizione e metodo di calcolo.

NUMERI COMPLESSI

Numeri complessi. Forma algebrica, trigonometrica, esponenziale. Potenze e radici di numeri complessi.